



TITLE:

レプリケーター系の分岐構造  
(2000年度基礎物理学研究所研究会  
「大自由度進化モデルの力学系研究」,研究会報告)

AUTHOR(S):

立川, 正志

---

CITATION:

立川, 正志. レプリケーター系の分岐構造(2000年度基礎物理学研究所研究会「大自由度進化モデルの力学系研究」,研究会報告). 物性研究 2001, 77(3): 533-542

ISSUE DATE:

2001-12-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/97142>

RIGHT:

# レプリケーター系の分岐構造

名古屋大学 理学部 物理学教室 R 研 立川 正志

mtach@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp

## 1 はじめに

レプリケーター系における力学系的な視点からの研究の歴史は古く、その低次元系での振舞はロトカ・ボルテラ方程式

$$\frac{dy_i}{dt} = y_i(r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

として、あるいはゲーム力学系<sup>1</sup>

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(\sum_{j=1}^{n+1} g_{ij}x_j - \sum_{j,k=1}^{n+1} g_{jk}x_jx_k), \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (2)$$

としてさまざまな性質が調べられてきている<sup>2</sup>。しかし、生態系の数理的性質を理解するためのモデルとしてレプリケーター系を考える場合は、高次元あるいは大自由度のレプリケーター系の普遍的な振舞を考える事になるが、レプリケーター系がカオスを生み出し得る非線形力学系であるため、個々の系の特殊性が邪魔をしてその大自由度系での定性的な理解は十分には得られていない。

本稿ではこの大自由度レプリケーター系を理解するための足掛かりとなる、レプリケーター系の相空間におけるベクトル場の構造とその分岐過程の、自由度によらない普遍的な性質について報告する。§2でレプリケーター系のベクトル場の構造を boundary から特徴付ける視点を導入し、その結果を踏まえて §3 以降でレプリケーター系のアトラクターの分岐過程について見ていく。

## 2 ロトカ・ボルテラ系のベクトル場の構造 (新しい視点から)

ロトカ・ボルテラ系は力学変数の比増加率  $\dot{y}_i/y_i$  が変数の一次式で書かれるという、極めてシンプルな非線形項を持つ力学系である。そのためロトカ・ボルテラ系は、振舞いの限定された解析しやすい非線形力学系のモデルとして、古くから調べられてきている。

一方、ロトカ・ボルテラ系の相空間構造の最大の特徴は、相空間が boundary によって区切られていることである。

<sup>1</sup> 一般的にはゲーム力学系の方程式を指してレプリケーター系と呼ぶことが多いが、本稿ではゲーム力学系と、その同値な力学系であるロトカ・ボルテラ方程式の2つの系を統一して扱う概念としてレプリケーターという言葉を使う事にする。

<sup>2</sup> [HS98] 等を参照

この boundary という構造から、ロトカ・ボルテラ系の“扱いやすさ”の持つ意味を特徴付けることができないか？というのがこの節の狙いである。

## 2.1 相空間内部の固定点 (準備)

$n$ 次元ロトカ・ボルテラ系が  $n$ 種共存する生態系を記述するためには、系のアトラクターは相空間内部に存在しなければならない。そしてロトカ・ボルテラ系においては、相空間内部に固定点が存在することがアトラクターを相空間内部に持つための必要条件となっている。

いま我々は (大自由度の) 安定な生態系の持つ性質について知りたいので、相空間内部に常に固定点  $q$  を持つことを仮定しておく。この仮定により、ロトカ・ボルテラ方程式 ((1) 式) は一般性を失わずに以下の形に変形できる。

$$\frac{dy_i}{dt} = y_i \left( - \sum_{j=1}^n a_{ij} + \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right) = y_i \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1 + y_j) \quad (3)$$

この形式は、相似変換  $\frac{y_i}{q_i} \rightarrow y_i$  により (1) 式の内部固定点を  $q$  から  $m \stackrel{\text{def}}{=} (1, 1, \dots, 1)$  うつしたもので、(1) 式に比べパラメータの自由度が落ちていて扱いやすいので、以降、本稿では (3) 式をロトカ・ボルテラ方程式として採用する。

また原点を  $m$  にうつした式は

$$\frac{dy'_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y'_j + y'_i \sum_{j=1}^n a_{ij} y'_j = (1 + y'_i) \sum_{j=1}^n a_{ij} y'_j \quad (4)$$

となる ( $y'_i = -1 + y_i$ )。

## 2.2 boundary と内部のベクトル場

相空間内部のベクトル場と boundary でのベクトル場の関係を考えたい。ベクトル場の連続性から、boundary 近傍のベクトル場は boundary のベクトル場からの摂動により記述されることは容易に想像がつくが、その近似的な描象はどの程度延長できるのだろうか？このことを調べるために、まず相空間内部の点を、以下のように boundary から相空間の内側に連続的に表記するパラメータ表示を導入しよう。

固定点  $m$  を原点とした座標系 ((4) 式) を考える (図 1 参照)。  $y'_n = -1$  である boundary 上の点を  $p$

$$p \stackrel{\text{def}}{=} (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, -1) \quad (5)$$

$$p_i \geq -1$$

とし、 $m$  と  $p$  を結ぶ線分  $l_p$  を考え、その線分上の  $s$  でパラメータ表示された点を  $l_p(s)$

$$l_p(s) \stackrel{\text{def}}{=} (p_1 s, p_2 s, \dots, p_{n-1} s, -s) \quad (6)$$

$$0 \leq s \leq 1$$

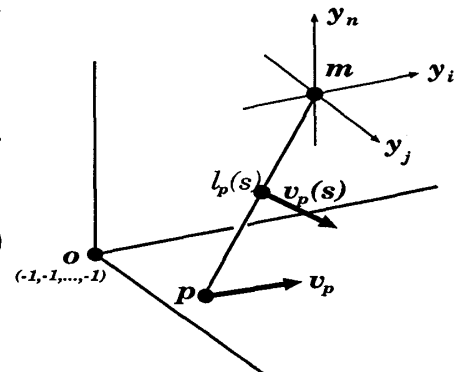


図 1: ロトカ・ボルテラ系の相空間 ( $m$  を原点とした座標系)

とする. これにより  $\{y | \min\{y_i\} < 0\}$ <sup>3</sup> を満たす相空間内部の点は, boundary 上の点  $\mathbf{p}$  と boundary からの距離を意味するパラメータ  $s$  により表される.

この表示を使い, 点  $\mathbf{l}_p(s)$  でのベクトル場の  $i$  ( $\neq n$ ) 成分を表してみると (4)(6) 式より

$$v_i^{\mathbf{p}}(s) = s(1 + p_i s) \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j \quad (7)$$

と表される. また boundary の点  $\mathbf{p}$  でのベクトル場の  $i$  成分は

$$v_{i\mathbf{p}} = v_i^{\mathbf{p}}(1) = (1 + p_i) \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j \quad (8)$$

となる.

この  $\mathbf{p}, s$  でパラメータ表示されたベクトル場の式から以下のことが示される ([Tac01]).

まず, パラメータ  $(p_i, s)$  の満たす不等式を考慮すると (7)(8) 式より,  $s$  を連続的に変えて線分  $\mathbf{l}_p$  にそって動かしてもベクトル場の各成分の符号は変わらず,

$$\text{sgn}\{v_i^{\mathbf{p}}(s)\} = \text{sgn}\{v_{i\mathbf{p}}\} \quad (9)$$

と常に一致することがわかる. そのため boundary でのベクトル場が作る flow と, 対応する内部での flow の内積は常にゼロ以上となる.

$$\mathbf{v}^{\mathbf{p}}(s) \bullet \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \geq 0 \quad (10)$$

ここで等号成立は  $v_{i\mathbf{p}} = 0$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) つまり  $\mathbf{p}$  が固定点の場合のみである. この結果は, boundary での flow の形は固定点  $\mathbf{m}$  を中心とした相空間の内部でも大まかに同じであることを意味している. ここで“大まかに同じ”とは“topological に同じ”よりも弱い意味で, (10) 式が不等式であるためこのような弱い評価しか与えていない. しかし, (10) 式は  $s$  について展開した式の評価ではなく任意の  $s$  に対する厳密な結果となっている. そのため, boundary から十分はなれた固定点  $\mathbf{m}$  近傍の flow と boundary の flow の形も, 同じ評価ができることになる. つまり上の結果から, 固定点  $\mathbf{m}$  の線形化ベクトル場の情報は boundary のベクトル場によって評価できることがわかる (cf. §6.2).

また  $p_i > -1$  とすると線分上の点  $\mathbf{l}_p(s)$  でのベクトル場は, boundary でのベクトル場を使い以下の様を書くことができる.

$$v_i^{\mathbf{p}}(s) = \frac{s(1 + p_i s)}{(1 + p_i)} v_{i\mathbf{p}} \quad (11)$$

(11) 式において特筆すべきことは, システムのパラメータである相互作用行列  $(a_{ij})$  が  $v_{i\mathbf{p}}$  にすべて入っていて,  $s$  に依存する関数  $\frac{s(1 + p_i s)}{(1 + p_i)}$  と分離していることである. つまり boundary のベクトル場  $v_{i\mathbf{p}}$  とその内側のベクトル場  $v_i^{\mathbf{p}}(s)$  の関係は相互作用行列  $(a_{ij})$  によらず, 位置に関する情報  $(p_i, s)$  だけから決定できることがわかる (cf. §4).

以上, 固定点  $\mathbf{m}$  を中心にして相空間内部の各点のベクトル場を boundary との関係から記述する方法と, その視点から得られるレプリケーター系のベクトル場の新しい性質を 2 つ紹介した. 以下の節ではこの結果を踏まえてレプリケーター系の分岐について考えていく.

<sup>3</sup> この領域以外の点もゲーム力学系を介した変換により同様の議論ができる.

### 3 分岐について<sup>4</sup>

分岐過程を知ることの重要性は、まず、その力学系のクラスが許す異った状態を統一的な数理構造として捉えることにあるが、そこで得られる知識はまた、記述しているシステムの外からの摂動に対する変化の可能性を知る手掛かりとなる。つまり、外からの摂動をパラメータの変化と考えると、システムがある状態から摂動により別のある状態に移る事ができるかどうかは、パラメータ空間でのその2つの状態の配置とそれらの境界の次元を調べることによってわかり、それは、分岐の余次元の問題となっている。

§4以降では、§2で導入した考え方を踏まえて、レプリケーター系のアトラクターの分岐について、特に、固定点の実固有値を持つ固有方向が不安定化する分岐 (§4)、固定点の複素固有値を持つ固有方向が不安定化する分岐 (§5)、ヘテロクリニック分岐 (§6) について解説する。

まず固定点の分岐を取り上げるのは、相空間の最も基本的な構造物であり、また、レプリケーター系において種の共存状態を表すもっとも一般的なアトラクターとなっているからである。固定点アトラクターが存在するパラメータ領域は広く、パラメータをランダムに設定した大自由度のレプリケーター系が多種の共存状態を持つならば、ほとんどの場合それは固定点アトラクターに漸近する系である。そのため固定点から、分岐によりどのように系の状態が変わり得るかを知ることが重要である。ヘテロクリニック分岐を取り上げる理由については、§6.2で述べる。

### 4 相空間内部の固定点の分岐 1 (実固有値の分岐)

力学系のベクトル場を固定点を原点として固有方向に分解すると、実固有値  $\lambda_l$  を持つ固有方向  $e_l''$  は一般に

$$\frac{dy_l''}{dt} = \lambda_l y_l'' + O(y''^2) \quad (12)$$

と書くことができ、この固有値  $\lambda_l$  がゼロ近傍の時のこの2次以上の項の寄与により、トランスクリティカル分岐やピッチフォーク分岐のように分岐の構造が決定される。

ロトカ・ボルテラ系の相空間内部の固定点  $m$  を考えてみよう。(4)式で表されたロトカ・ボルテラ方程式を、ベクトル場を対角化することによりある方向  $e_l''$  について (12) 式が得られたとする。ここで高次項を調べるために、この固有方向  $e_l''$  と §2.2(6) 式で導入した線分  $l_p(s)$  を重ね合わせ、その線分上ベクトル場を §2 で導入した形式 ((7) 式) で書いてみると、分岐点 ( $\lambda_l = 0$ ) では、

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} p_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

つまり、線分  $l_p(s)$  上の点は全て固定点となることが示される。

$$\frac{dy_l''}{dt} = \lambda_l (y_l'' + O(y''^2)) \quad (14)$$

<sup>4</sup> 分岐理論一般については [GH88] 等を参照

である。また、この分岐の相空間の幾何的な性質を考慮し、今考えている分岐の軸以外の方向の固有値の実部が分岐点近傍で常に負であるとする、固有方向に分解した座標系 ( $y''$  系) と、元の座標系 ( $y$  系, (3) 式) との間の関係は

$$y''_l = -1 + y_n + \lambda_l \cdot (y \text{ の } 1 \text{ 次式}) \quad (15)$$

と表される事がわかる (ここで元の座標系の任意のある軸を  $y_n$  軸と選んだ)。

(14) 式, (15) 式より元のロトカ・ボルテラ方程式 ((3) 式) の形に戻すと

$$\frac{dy_n}{dt} = \lambda_l \cdot y_n \cdot \sum_{j=1}^n a'_{nj} (-1 + y_j) \quad (16)$$

$$a'_{nj} = \frac{a_{nj}}{\lambda_l} \quad (17)$$

$$a'_{nn} = -1 + O(\lambda_l) \quad (18)$$

となる。

分岐過程を、相空間内部の固定点が安定な状態から順を追って見ていくと、まず、分岐点近傍で boundary の  $y_n = 0$  であるサブシステムにサドル型固定点 (図2の  $p$ ) が存在する。分岐点では  $p$  が  $m' \stackrel{\text{def}}{=} (1, 1, \dots, 1, 0)$  と一致し、 $m$  と  $m'$  を通る  $y_n$  軸と平行な半直線が固定点の集合となる。分岐点をこえると、 $m$  はサドルとなり、 $p$  がアトラクターとなる。また、 $m$  の不安定方向にそって発散する解も存在する。

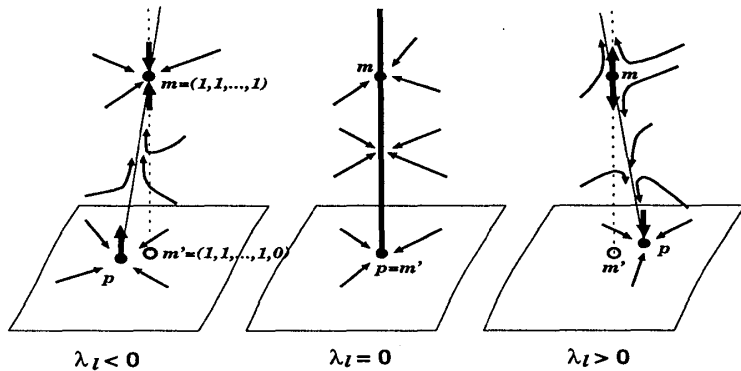


図2: 固定点  $m$  の分岐 (実固有値を持つ固有方向)

以上から、ロトカ・ボルテラ系の内部固定点の実固有値の分岐構造が理解されたが、ではこの分岐の起こりやすさはどうなっているだろうか？ この分岐過程のパラメータに対する制限を考えてみると、(17) 式はこの分岐の分岐点において、 $n$  個のパラメータ  $a_{nj}$  が全てゼロになる事を意味していて、これが満たされなければこの分岐は起きないことになる。つまり、 $n$  次元ロトカ・ボルテラ系において相空間内部に固定点の実固有値がゼロを跨ぐ分岐は、言い換えると、パラメータ変化により固定点が相空間内部に留まったままその1次元方向の安定性を変える分岐は、余次元  $n$  の分岐である。

## 5 相空間内部の固定点の分岐2 (複素固有値の分岐)

3次元以上のレプリケーター系においては、固定点  $m$  の複素固有値を持つ固有方向が不安定化する分岐の場合、余次元1の分岐は普通のホップ分岐となり、リミットサイクルが生成される。

ではホップ分岐によって生成されたリミットサイクルが不安定化するとどのような事が起きるのだろうか？ その不安定化の一つの例としてヘテロクリニック分岐がある。

## 6 ヘテロクリニック分岐

### 6.1 ヘテロクリニック分岐とは

ヘテロクリニック分岐とは、対象とする力学系がパラメータ変化の範囲内でロバストなヘテロクリニックサイクルを持つ場合において、ヘテロクリニックサイクルの漸近安定性が変化する分岐のことで、分岐の前後にリミットサイクルが生成される。レプリケーター系は相空間に boundary を持つため、その boundary 内にその時間発展不変性を利用してロバストなヘテロクリニックサイクルが存在しうる。例として  $n=4$  ゲーム力学系 (相空間 3 次元) のヘテロクリニック分岐の様子を図 3 に示す。

この図 3 の相互作用行列は

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b & c \\ c & 0 & -a & -b \\ -b & c & 0 & -a \\ -a & -b & c & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$a, b, c > 0$

と巡回対称にとっている。この系の分岐値は

$$c = a + b \quad (20)$$

となる時である。

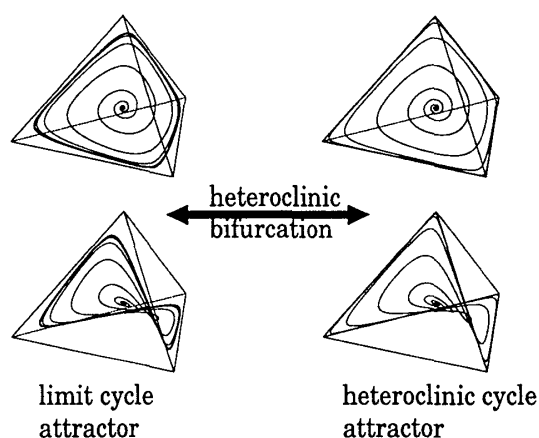


図 3:ヘテロクリニック分岐前後のアトラクターとそれに漸近する軌道

### 6.2 ホップ分岐とヘテロクリニック分岐

ホップ分岐により生成されたりミットサイクルが不安定化する過程としての分岐はいくつか考えられるが、本稿では特にヘテロクリニック分岐について解説する。§6.3 では、レプリケーター系に限らず適用できる一般的なヘテロクリニック分岐の分岐過程を解説するが、その前に、§5 のホップ分岐の次に、特にヘテロクリニック分岐を取り上げた理由をここで述べておこう。

ホップ分岐とヘテロクリニック分岐を対比して捉える背景として、まず、2次元ゲーム力学系 ( $n=3$ ) においてはホップ分岐とヘテロクリニック分岐が常に縮退していることがあげられる。2次元ゲーム力学系では、固定点の複素固有値の方向が中立安定になると、必ずヘテロクリニックサイクルも中立安定となり、周期軌道の密な列ができる (図 4)。その (分岐) 前後では固定点かヘテロクリニックサイクルのどちらかが安定である。また一般の次元のゲーム力学系の場合においても、相互作用を反対称に選ぶと固定点とヘテロクリニックサイクルがともに中立安定となることが報告されている ([Cha01])。上の 2次元の例もこの中に含まれる。

また §2 の (10) 式の結果から、ヘテロクリニックサイクルと内部固定点を持つレプリケーター系では、そのヘテロクリニックサイクルに対応する複素固有値を内部固定点を持つことも示すことができる ([Tac01])。

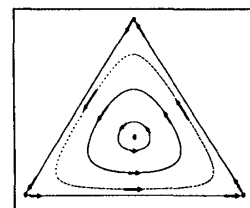


図 4:  $n=3$  ゲーム力学系における周期軌道の列

ホップ分岐を起こすパラメータ変化の向きは、分岐のローカルな座標系 (normal form) の範囲内で、生成されたりミットサイクルを拡大させる方向に働く。一方、ヘテロクリニック分岐は、リミットサイクルが大きくなり、結果としてヘテロクリニックサイクルと一致したと見ることもできる。このような二つの分岐過程における構造の類似を数理的に捉えることができれば、レプリケーター系の相空間構造に対する理解が深まると考えている。

### 6.3 分岐過程の記述

§6.1 のゲーム力学系 (図 3) を例にとり、ヘテロクリニック分岐の分岐過程を解説する ([HS98])。

#### 6.3.1 分岐の記述とリターンマアップ

ヘテロクリニック分岐を理解するためにはヘテロクリニックサイクルの安定性が記述できればよい。ヘテロクリニックサイクルの安定性は、サイクルにそって構成したリターンマップにより議論できる。

ここで注意しなければならないのは、ヘテロクリニックサイクルは 1 つの極限集合になっているがそれ自体は 1 本の軌道ではなく、複数の固定点とそれをつなぐ複数の軌道から作られている。そのためリミットサイクルにそったリターンマップを構成するときのように、サイクルにそって積分を行うこと

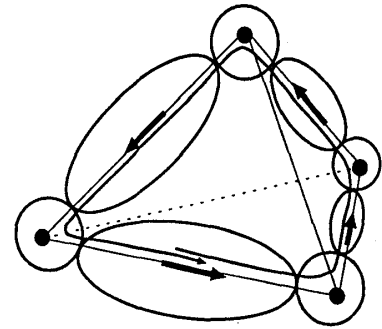


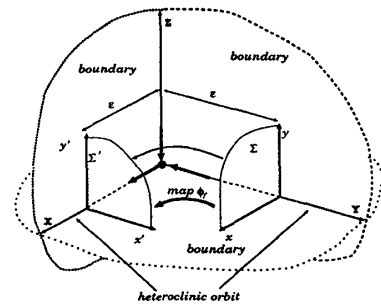
図 5: ヘテロクリニックサイクル近傍の軌道と flow の分解

ができない。そのためヘテロクリニックサイクル近傍の相空間を固定点近傍 (図 5 の円の部分) とヘテロクリニック軌道近傍 (図 5 の楕円の部分) に分け、それぞれの場所での flow を記述したマップを作って繋ぎ合わせるにより、リターンマップを構成する。

#### 6.3.2 リターンマップの構成

まず、それぞれのマップについてみてみよう。

固定点近傍の flow を記述するマップは、ヘテロクリニックサイクルを形成する固定点の近傍の (ヘテロクリニックサイクルに沿った) 入口と出口に図 6 のようにサイクルと横断的な面  $\Sigma, \Sigma'$  を設定し、 $\Sigma$  から  $\Sigma'$  へのマップ計算することにより求まる。固定点近傍のベクトル場は固定点を原点とした線形ベクトル場



(21) 図 6: 固定点近傍の flow とマップ

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (21)$$

で近似的に表されるので、固定点近傍の flow を記述するマップは

$$\phi_f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c^a \\ yx_c^b \end{pmatrix} \quad (22)$$

となる。



ヘテロクリニック軌道にそった flow を記述するマップは、ヘテロクリニック軌道と横断的な方向のベクトル場の線形成分を軌道にそって  $\varepsilon$  から  $1-\varepsilon$  まで積分することによりえられる。

このとき、boundary の拘束によりベクトル場の線形部分は boundary 方向に自動的に対角化されるので、マップは以下の形になる。

$$\phi_h : \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (23)$$

ここで

$$A = \exp \left\{ \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\partial X}{\partial Z} \Big|_{X,Y=0} dZ \right\} = \exp \left\{ \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\dot{X}}{X \dot{Z}} \Big|_{X,Y=0} dZ \right\} \quad (24)$$

である。

以上、固定点近傍の flow を記述するマップとヘテロクリニック軌道にそった flow を記述するマップを、 $(x, y)$  の方向に注意して図5のように繋ぎ合わせるによりリターンマップ

$$\Phi : \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_x \cdot x_n^{\alpha_{xx}} \cdot y_n^{\alpha_{xy}} \\ \beta_y \cdot x_n^{\alpha_{yx}} \cdot y_n^{\alpha_{yy}} \end{pmatrix}$$

が構成される。

このリターンマップ  $\Phi$  はサイクルにそった再帰的な flow を近似したマップであり、その有効範囲は  $0 \leq x, y \leq 1$  である。また原点はヘテロクリニックサイクルとなっている。

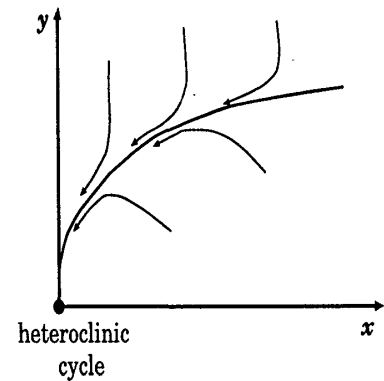


図 8: リターンマップ  $\Phi$  の相空間

### 6.3.3 ヘテロクリニック分岐

リターンマップ  $\Phi$  はこのままでは扱いにくいので、解析しやすくするため両辺  $\log$  をとる。  $X \equiv \log x, Y \equiv \log y$  として書き下すと

$$\Psi : \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \log \beta_x \\ \log \beta_y \end{pmatrix} \quad (25)$$

と線形のマップとなる。マップの相空間は図9のようになる(ヘテロクリニックサイクルが安定の場合)。もとのリターンマップ  $\Phi$  においてヘテロクリニックサイクルは原点にあったので、 $\log$  をとったマップ  $\Psi$  ではヘテロクリニックサイクルは  $(X, Y) \rightarrow (-\infty, \infty)$  方向にあることになる。またマップ  $\Psi$  の有効範囲は

$$X_n \ll -1, Y_n \ll -1 \quad (26)$$

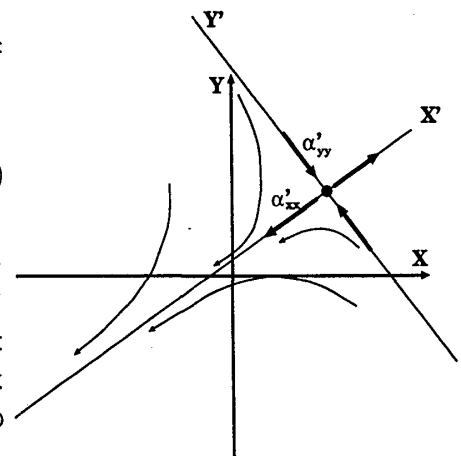


図 9: マップ  $\Psi$  の相空間

(ヘテロクリニックアトラクター)

である。適当な線形変換により行列  $(\alpha_{ij})$  を

$$\begin{pmatrix} X'_{n+1} \\ Y'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'_{xx} & 0 \\ 0 & \alpha'_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_n \\ Y'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta'_x \\ \beta'_y \end{pmatrix} \quad (27)$$

と対角化すると、 $X'$  軸の負の方向への漸近性がヘテロクリニックサイクルの安定性を決めることになるので、ヘテロクリニック分岐の分岐点近傍で  $Y'$  方向は安定性は変わらない ( $|\alpha'_{yy}| < 0$ ) と仮定すると、ヘテロクリニック分岐は 1 次元線形マップ

$$\Psi' : X'_{n+1} = \alpha'_{xx} X'_n + \beta'_x \quad (28)$$

で記述される。

つまりヘテロクリニック分岐とは、マップ  $\Psi'$  において  $\alpha'_{xx} = 1$  の前後で  $X'$  軸方向の安定性が変わる分岐として理解できる。

実際に分岐過程は次のようになっている。

#### 『ヘテロクリニック分岐の分岐過程』

まず、 $\alpha'_{xx} > 1$  の場合はマップ  $\Psi$  の相空間は図 10.1 のようになる。固定点が

$$X'_0 = \frac{\beta'_x}{1 - \alpha'_{xx}} > 0 \quad (29)$$

にあり (マップの有効範囲外),  $X'$  軸方向は不安定になっていて、そのため、ヘテロクリニックサイクルが漸近安定になっている。

固有値  $\alpha'_{xx}$  を 1 に近づけて行くに従い ( $\alpha'_{xx} - 1 \rightarrow +0$ ) 固定点  $X'_0$  が  $X'$  軸の正の方向に動いて行く。

分岐点  $\alpha'_{xx} = 1$  では固定点が無限遠に飛んで、 $X'$  軸方向は

$$X'_{n+1} = X'_n + \beta'_x \quad (30)$$

という 1 回毎に定数  $\beta'_x$  だけ動くシフトマップになる (図 10.2)。

そして  $\alpha'_{xx}$  が 1 より小さくなった所で  $X'$  軸方向の  $-\infty$  に固定点

$$X'_0 = \frac{\beta'_x}{1 - \alpha'_{xx}} < 0 \quad (31)$$

ができ (図 10.3),  $\alpha'_{xx}$  が小さくなるにつれ  $X'$  軸の正の方向に動いていく。分岐点以降できた固定点はマップの有効範囲内にあり、リミットサイクルを表している。

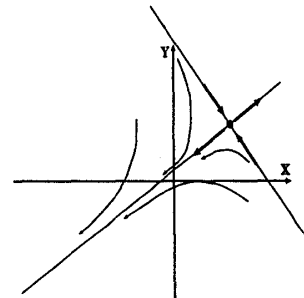


図 10.1:  $\Psi$  の相空間  
(ヘテロクリニックアトラクター)

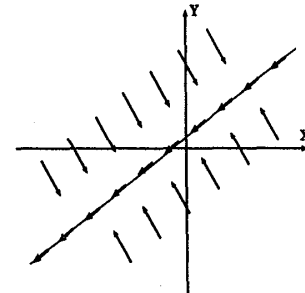


図 10.2:  $\Psi$  の相空間  
(ヘテロクリニック分岐点)

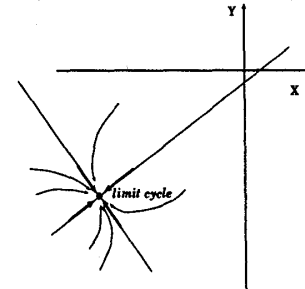


図 10.3:  $\Psi$  の相空間  
(リミットサイクルアトラクター)

## 6.4 高次元系について

§6.3 では、ヘテロクリニック軌道を単純に繋いだ単サイクルの場合について分岐過程を考えた。一方、高次元のレプリケーター系を考えてみると、このような単純なサイクルだけでなく、ヘテロクリニック軌道を用いて複雑で再帰的なネットワークをつくることができ、このヘテロクリニックネットワークがアトラクターとなる場合、そこに漸近する軌道はネットワークの枝をカオス的に選んでいく現象が知られている ([Cha95])。このカオス的なヘテロクリニックネットワークもヘテロクリニック分岐を起こすことは数値的に確かめることができる。この場合リミットサイクルではなく、ネットワークの構造に対応するようなストレンジアトラクターが生成される。

## 7 おわりに

小数自由度レプリケーター系での自明な結果を元に、大自由度レプリケーター系でも成り立つ普遍的な性質を、系の分岐を通して考察した。ここでいう普遍的な性質とは自由度によらない性質であり、本研究ターゲットである大自由度特有の性質を意味していない。むしろこの二つの性質は相補的なものだと考えられる。大自由度特有の性質については、現在、計算機で個別の系を解くことにより様々な豊かな現象が報告されているが、それらの現象の中から普遍的な性質を抽出することは容易なことではない。「複雑性」や「多様性」など大自由度ゆえの論理を探るためには、この二つの性質の相補性が重要となるのではないだろうか？

## 謝辞

小西哲郎助教授、増富祐司氏、後藤振一郎氏及び名古屋大学R研のメンバーには、日々の有益な議論に感謝します。

## 参考文献

- [Cha95] Chawanya, T. *Progress of Theoretical Physics*, 94, 163 (1995).
- [Cha01] 茶碗谷 毅, レプリケーター系における多様性について考える, (本報告集).
- [GH83] Guckenheimer, J. and Holmes, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, (1983).
- [HS98] Hofbauer, J. and Sigmund, K. *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge Univ. Press, (1998). 進化ゲームと微分方程式 (日本語訳: 竹内康博) 現代数学社 (2001).
- [Tac01] 立川 正志, 修士論文『生態系モデルにおける個体数動力学的数理的研究』, (2001), <http://jegog.phys.nagoya-u.ac.jp/~mtach/research/>.